

Теорема Котельникова «для чайников» простыми словами

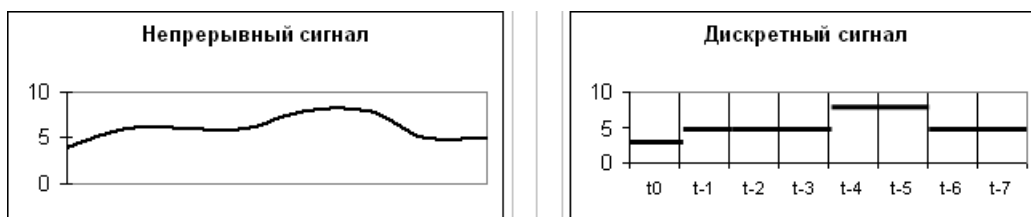
Попробуем нестандартно в сравнении с книгами по радиоэлектронике и цифровым системам связи, простыми житейскими примерами объяснить суть теоремы Котельникова. Если читатель еще не знаком с теоремой отсчётов, то рекомендуется сначала изучить ее формулировку в деловом официальном стиле. Смотрите, например, [прошлую статью](#).

Аналоговые и дискретные процессы в природе

Абсолютное большинство процессов в природе протекают непрерывно, (изменение температуры воздуха на улице, давления, влажности, изменение скорости ветра, колебание электрического тока в проводнике, сияние Солнца). Почему все эти процессы непрерывны? Нам кажется, что время течет непрерывно, а значит в каждый момент времени должно существовать какое-то значение температуры воздуха или значение силы тока в проводнике, или значение интенсивности света Солнца. Непрерывные процессы, функции или сигналы называют **аналоговыми** (от слова аналог – нечто сходное, подобное чему-то, т.е. функция как модель является аналогом какому-то физическому процессу). Можно наблюдать множество непрерывных процессов в природе, например, непрерывный поток воды в источнике. Струя воды при падении вниз сужается как раз в силу поддержания непрерывности потока.



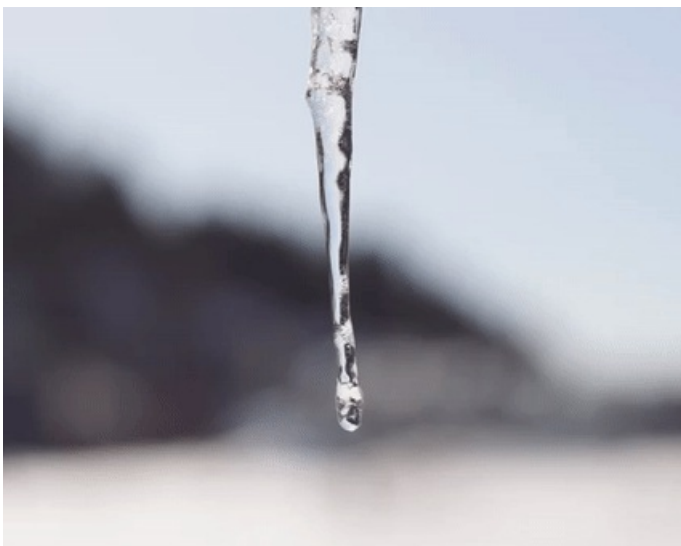
Аналоговый сигнал даже на конечном временном промежутке подразумевает набор бесконечного числа значений. Однако регистрирующие устройства, как правило фиксируют конечное число значений, поэтому мы получаем **дискретные** сигналы (дискретный от лат. discretus означает раздельный, состоящий из отдельных частей).



Представление непрерывного и дискретного сигналов.

Дискретные процессы также многочисленны в природе, как и аналоговые состояния. Дискретные процессы не могут находиться в каком-то промежуточном состоянии между определенными значениями. Придумаем несколько примеров из жизни:

1. Из квантовой физики 1-й постулат Бора: электрон в атоме может двигаться только по определенным (можно сказать по дискретным) орбитам, находясь на которых, он не излучает и не поглощает энергию. Электроны в атоме, находясь на определенных стационарных (т.е. дискретных) орбитах, имеют вполне определённые дискретные значения энергии E_1 , E_2 , E_3 и т.д.
2. Если вы играете на пианино, то звучащая музыка во времени представляет собой переключения с одной дискретной ноты на другую, то есть ноты – это отдельно выбранные дискретные звуки.
3. Когда мы поднимаемся по лестнице, ступня в пространстве оси высот находится только на определенной дискретной координате (ступеньке)



Поскольку человек не может оперировать с бесконечными числами и величинами, обычно все округляем до ближайших целых чисел – в результате получаем цифровые сигналы. Например, мы наносим цифровую шкалу на столбик термометра и фиксируем округленное значение температуры. Непрерывное время мы разбиваем на секунды, минуты, часы – наносим цифры на циферблат часов. Все символьные и знаковые системы, созданные человечеством для обмена информацией, использует конечное число возможных элементов.

Поскольку все вычислительные информационные устройства могут работать лишь с дискретными символьными системами и с цифровыми сигналами, постоянно возникает необходимость в переходе от существующих в природе непрерывных процессов, к дискретным и цифровым. С развитием цифровой связи и цифровых устройств (микроконтроллеров, компьютеров) постоянно и повсеместно на каждом шагу выполняется аналого-цифровое преобразование сигналов, неотъемлемой частью которого является дискретизация сигналов. Но здесь важно следующее: перейти от непрерывного сигнала к дискретному дело нехитрое – здесь удачно подходит выражение "ломать не строить". По аналогии можно сказать "ломать аналоговый сигнал – не восстанавливать его", здесь все просто реализовать, но главное при этом выполнить дискретизацию правильно. Одно дело просто произвести выборку отдельных значений сигнала, но есть еще другое дело – потом надо будет по этим значениям снова восстановить исходный непрерывный сигнал. Как правильно дискретизировать сигналы говорится в теореме о дискретизации сигналов, или ее можно называть в честь автора – теоремой Котельникова.

Если не знать теорему Котельникова

Итак, мы выяснили, что как и множество процессов в природе, электрические сигналы, используемые во всей электронике и системах связи бывают аналоговые и дискретные. В цифровых системах необходимо переходить от аналоговых сигналов к дискретным, при этом переход должен быть корректным.

Наглядный пример номер раз. Давайте посмотрим на примере двух музыкальных фрагментов, что будет, если осуществлять дискретизацию сигнала некорректно.

Вот что будет при неправильной оцифровке музыки

[Исходная музыкальная запись](#)

[После неправильной дискретизации](#)

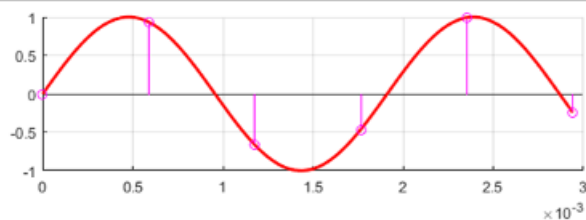
Вот что будет при неправильной оцифровке речи

[Исходная запись](#)

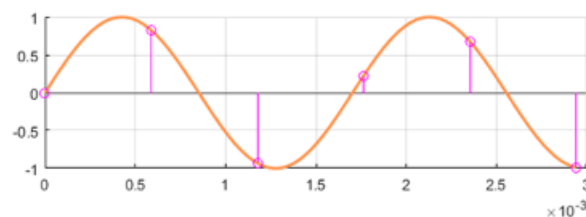
[После неправильной дискретизации](#)

Наглядный пример № 2. На рисунке ниже представлены 7 сигналов, каждый из которых соответствует своей музыкальной ноте – До, Ре, Ми, Фа, Соль, Ля, Си. Все они оцифрованы с частотой дискретизации 1700 Гц.

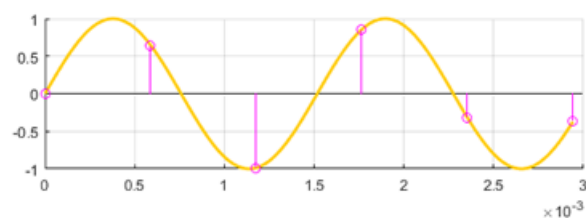
Давайте [послушаем](#), что из этого получилось.



523 Гц



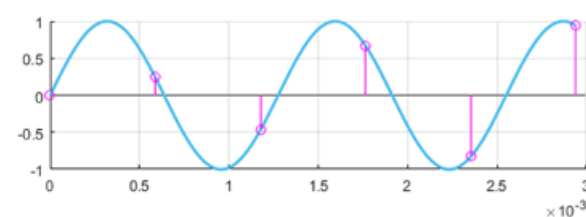
587 Гц



659 Гц



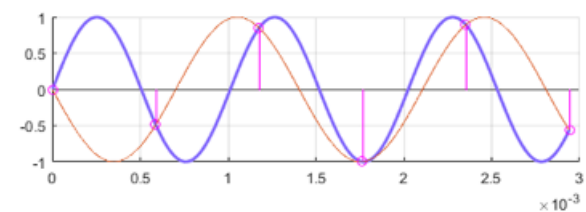
698 Гц



784 Гц



880 Гц

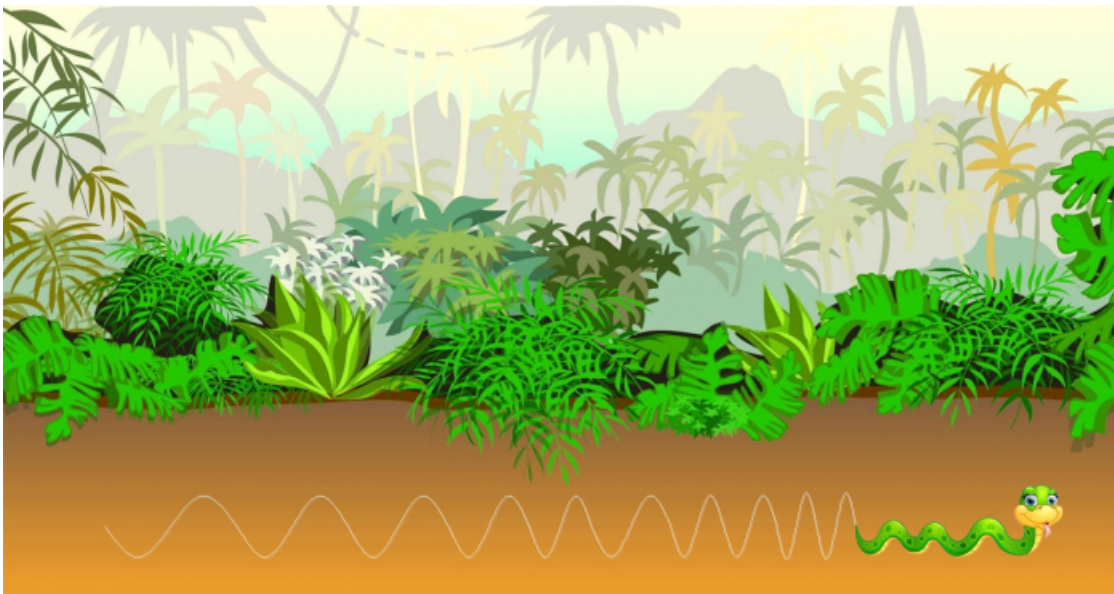


988 Гц

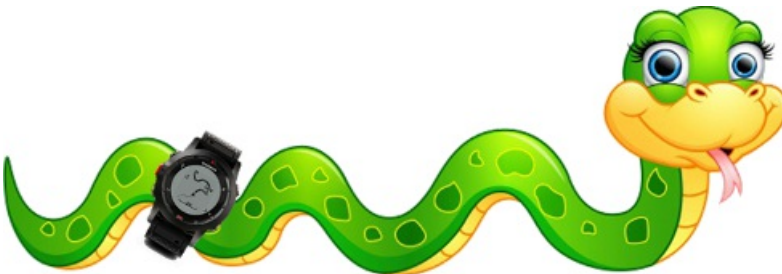
Надеюсь, с музыкальным слухом все в порядке и вы услышали, что с последними двумя прозвучавшими нотами что-то не так. Если не знать теорему Котельникова, то будет непонятно, почему звук при дискретизации исказился. Поэтому давайте разбираться в этой теореме.

Наглядное, но нестандартное объяснение теоремы о дискретизации

Представим себе, что мы работники Animal Planet и хотим изучить траекторию движения в джунглях какой-нибудь редкой змейки из красной книги. Назовем, например, изучаемую змею Зигзагусс.



С целью исследования мест обитания змеи и ее повадок цепляем к ее хвосту GPS-датчик, который будет регистрировать ее местоположение в отдельные моменты времени.



Вопрос: как надо запрограммировать датчик, чтобы мы получили точную траекторию движения змейки, т.е. получили самый подробный график траектории движения юркой змейки со всеми ее виляниями и изгибами? Через сколько миллисекунд или секунд датчику необходимо будет записывать и посылать нам очередную координату положения в пространстве?



Допустим, наша змея Зигзагусс ползет гармонично – ее хвост совершает гармонические колебания и ее движения можно описать синусоидальными функциями.

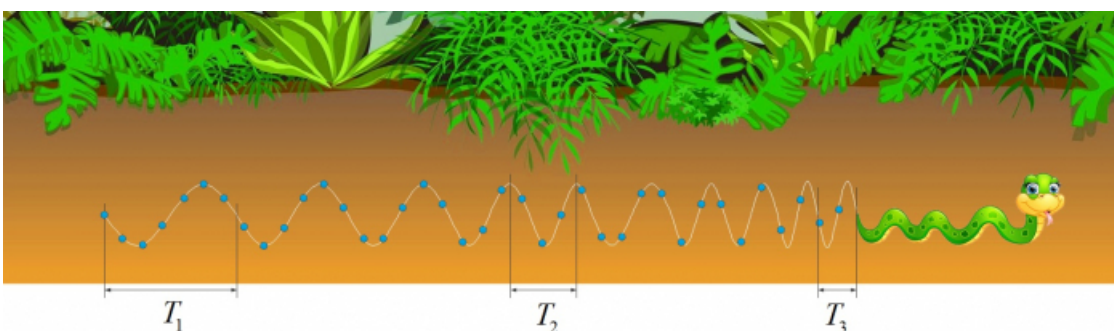


Фото настоящего следа от змеи на песке.

Траектория движения представляет собой колебания с различными частотами. Так вот, по правилам теоремы о дискретизации, чтобы восстановить всю траекторию движения змейки, необходимо найти составляющую колебаний самой высокой частоты.

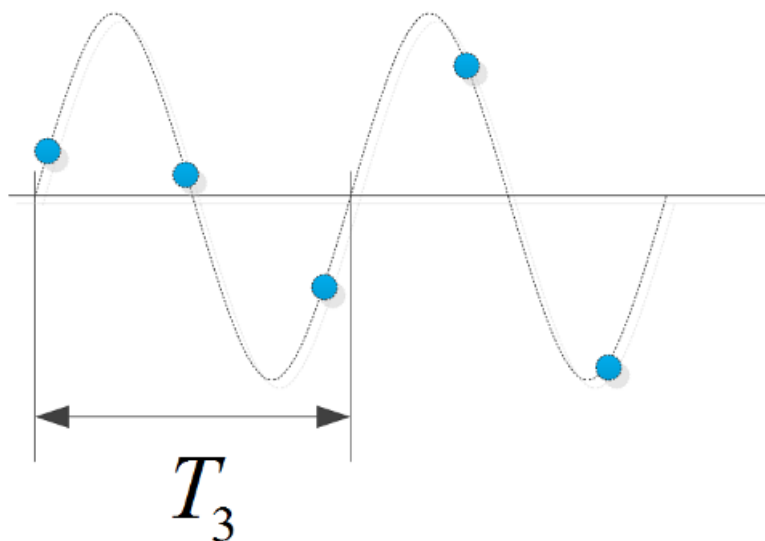


Если по дискретным точкам мы сможем восстановить составляющую колебаний самой высокой частоты, то мы сможем восстановить всю траекторию змейки. Определим периоды всех колебаний (см. рисунок ниже).



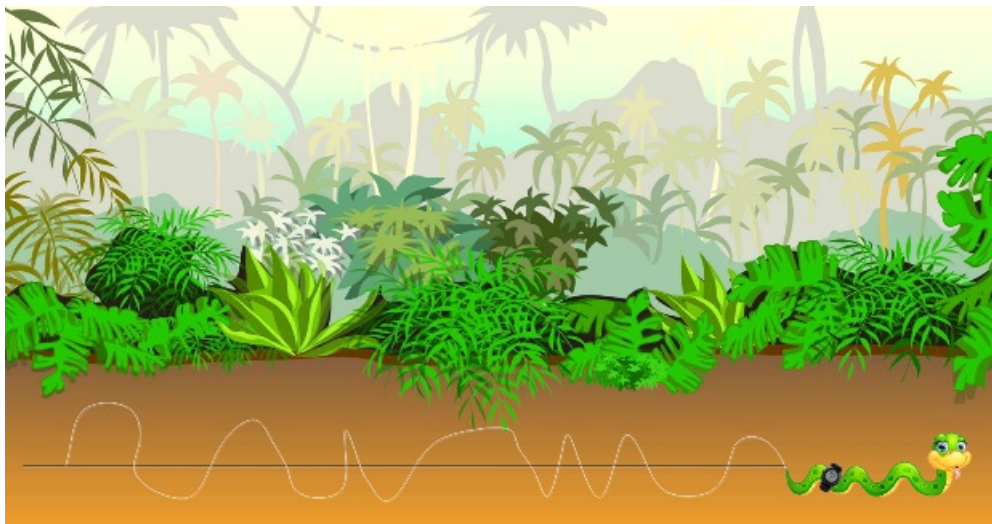
Как видно из рисунка, наименьшим периодом колебаний является период T_1 . Следовательно,

необходимо подобрать частоту выборки дискретных точек именно для колебания с периодом , тогда и все остальные колебания мы сможем потом восстановить. Другими словами, в соответствии с теоремой о дискретизации (см. формулировку [здесь](#)) можно полностью восстановить данную синусоидальную функцию, если брать дискретные точки через интервал времени вдвое меньший длительности периода . Это означает, что необходимо брать точки с таким интервалом, чтобы на период колебания самой высокой частоты приходилось не менее 2-х точек.

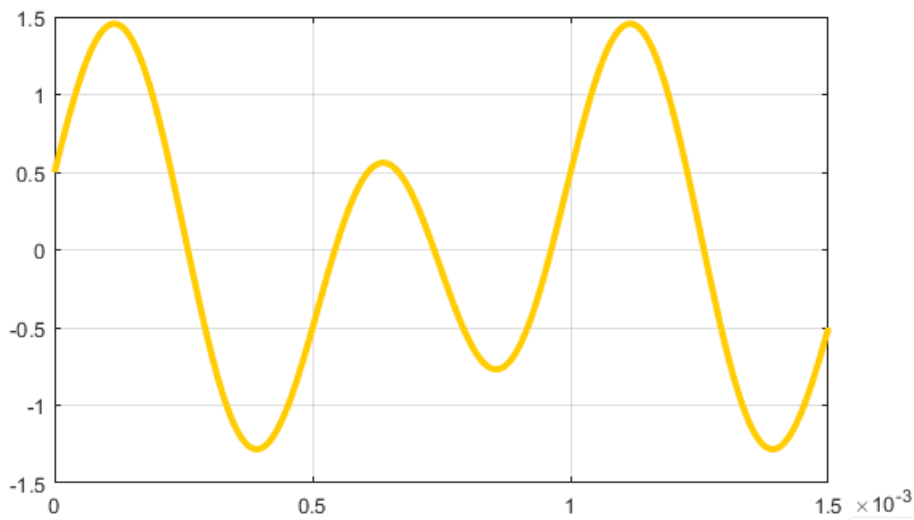


В этом случае можно будет с высокой точностью восстановить всю непрерывную траекторию движения исследуемой змеи.

Предположим теперь, что Зигзагусс опьянилась запахом одурманивающего цветка и стала ползти негармонично, несуразно.

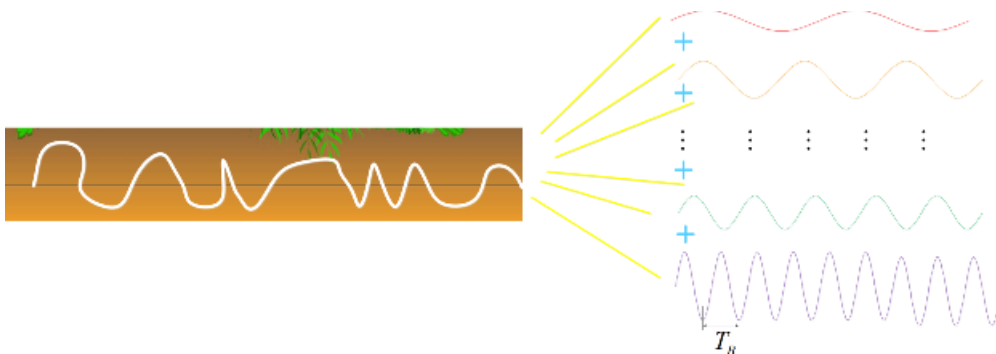


В этом случае для определения периода дискретизации нам необходимо самим отыскать гармонию в данной кривой функции, а она есть внутри любого сигнала всегда, что пытался в свое время доказать всем людям французский математик Жан-Батист Фурье. Также как любое тело можно разложить на множество атомов, также и полученную сложную функцию (от траектории змеи), можно разложить на множество гармонических функций. Физические тела разные, потому что они отличаются друг от друга структурой молекул. Например, мы говорим H_2O – это вода, что означает: молекула воды состоит из двух атомов водорода H и одного атома кислорода O. Точно также можно сказать, что разные сигналы отличаются разным составом. Например, такой вот сигнал



состоит из двух гармонических функций (синус и косинус) с частотой 1000 Гц и одного синуса с частотой 2000 Гц (2000 Гц означает, что гармоника совершает 2 тысячи колебаний в секунду). В соответствии с условием теоремы Котельникова, о котором мы уже ранее говорили, для такого сигнала временной интервал между дискретными точками необходимо брать таким, чтобы он был меньше половины периода самой высокой частоты. В нашем случае имеется гармоника с максимальной частотой 2 тысячи колебаний в секунду (2000 Гц), значит период сигнала равен $1/2000 = 0.0005$ секунд и значит период между дискретными точками должен быть менее, чем $0.0005/2 = 0.00025$ секунд.

Чтобы определить требуемый период между дискретными точками для траектории нашей змейки, необходимо определить из каких гармонических функций она состоит, а точнее нас интересует значение частоты наивысшей гармонической функции (т.е. фиолетовой на рисунке).



Делим период фиолетовой гармоники пополам, и получаем граничное значение для периода дискретизации функции траектории одурманенной змеи. Все, задача решена, можно произвести дискретизацию данного сложного сигнала.

Знаем и соблюдаем условия теоремы Котельникова

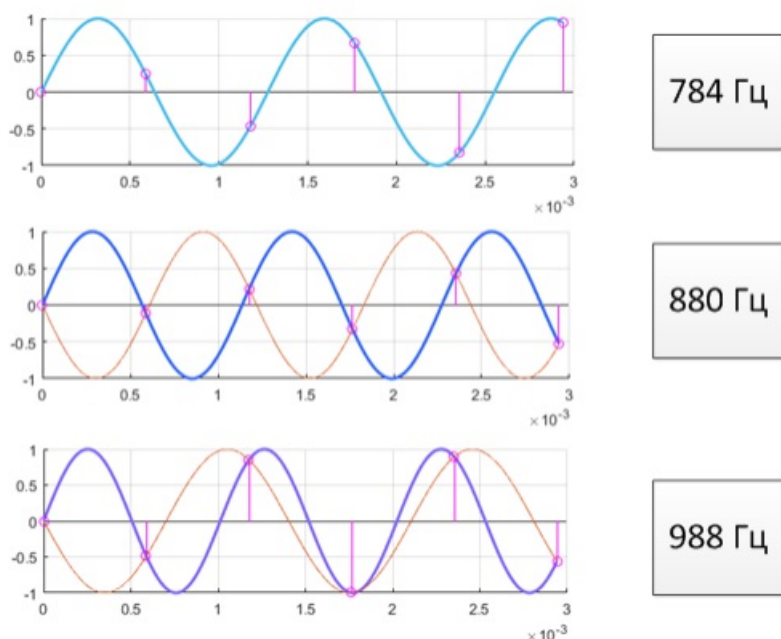
Теперь, когда мы знаем теорему Котельникова, давайте еще раз рассмотрим задачу правильного перехода от аналоговых 7 сигналов- музыкальных нот к дискретным. Итак, у нас есть семь гармонических колебаний, с частотами

До	Ре	Ми	Фа	Соль	Ля	Си
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
523 Гц	587 Гц	659 Гц	698 Гц	784 Гц	880 Гц	988 Гц

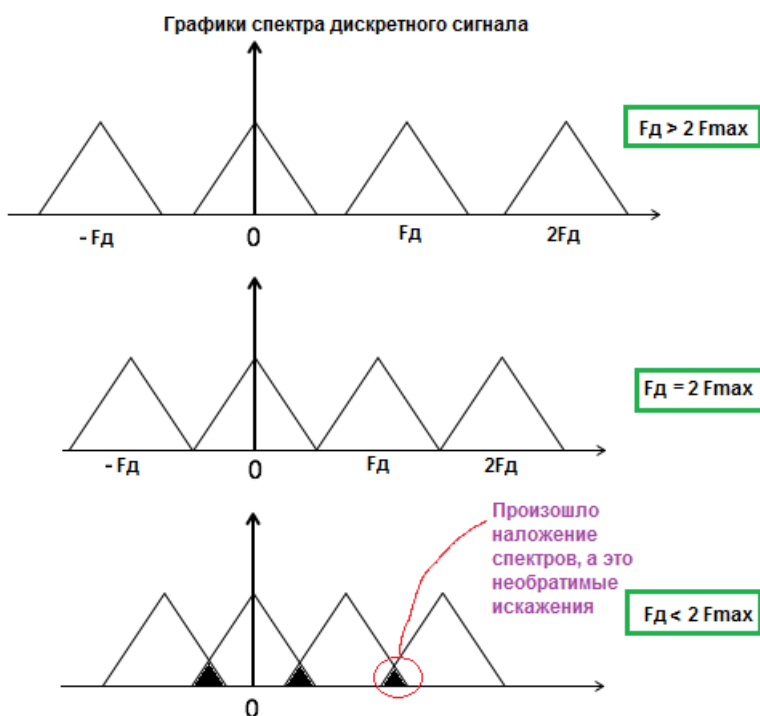
Для правильной дискретизации, чтобы не было искажений, необходимо взять частоту дискретизации не менее в два раза больше максимальной частоты сигнала. Ранее мы брали частоту 1700 Гц, но как можно посчитать, такая частота подходит для сигналов нот До – Соль (для ноты Соль требуется

частота дискретизации $784 \times 2 = 1568$ Гц), а вот для сигналов ноты Ля и Си значение 1700 Гц уже не годится.

Еще раз рассмотрим дискретизацию наших сигналов



Как видно из рисунка из-за несоблюдения условий теоремы Котельникова для сигналов Ля и Си с частотами 880 Гц и 988 Гц, через получившиеся дискретные отсчеты можно провести другие гармонические сигналы (красные функции), частоты которых меньше $1700 \text{ Гц} / 2 = 850 \text{ Гц}$. Произошел эффект, который называют наложение спектров (в англоязычной литературе – aliasing). В рамках данной статьи "для чайников" мы не будем подробно рассматривать этот эффект, поскольку здесь уже требуются знания спектрального анализа сигналов. Этот эффект интересен тем, что объясняет условия теоремы Котельникова с позиций представления сигналов в частотной области (см. рисунок ниже). Если разобраться в этом, то теорема Котельникова и принципы восстановления сигналов станут более понятными. Описание этого эффекта можно найти почти в каждой книге по цифровой обработке сигналов.



Но сейчас новичкам в этой области главное запомнить результат несоблюдения теоремы отсчетов – восстановление сигналов по имеющимся дискретным отсчетам будет неоднозначно. Чтобы такого не происходило, необходимо чтить теорему Котельникова.

Максимальная частота среди наших 7 сигналов 988 Гц (нота Си), следовательно частота

дискретизации должна быть больше, чем $2 \cdot 988 = 1976$ Гц. Важно здесь неуместно отметить, что в 1976 году был создан первый персональный компьютер – начался кустарный выпуск Apple I.

Значит надо выбрать частоту дискретизации больше значения 1976.

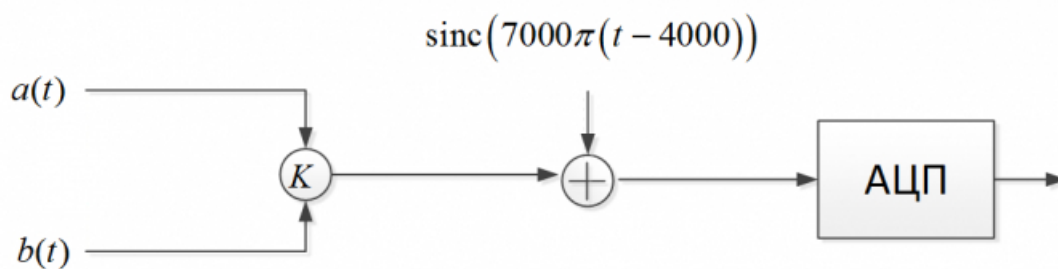
Вот как будут [звучать](#) семь наших сигналов при частоте дискретизации 2000 Гц.

Задача для разминки мозгов

Нельзя сказать, что эта задача очень простая для начинающих и ее решит любой. Новички в этой области не унывайте, если не получится (здесь нужны знания теории сигналов), ну а тот, кто решит, может собой гордиться.

С двух датчиков регистрируются сигналы

$$a(t) = 3 \cos(5000(\pi t - 0.2)) \text{ и } b(t) = 4.5 \cos\left(6000 \frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{4}\right)$$



Какой должна быть минимальная частота дискретизации в АЦП по условию теоремы о дискретизации, если К – операция сложения и если К – операция умножения?